数理解析研究所講究録
116巻 1971年 24-32

代数的スタイン曲面

名大　理　　梅村浩

複素数体$\mathbb{C}$上で定義された代数的多様体（特にことわらないかぎりnon-singular），又はcomplex manifoldを考えることにする。

Xを代数的多様体とすると，Xから自然にcomplex manifold X^{an}が定義される。algebraic cohomological dimension $\mathrm{alg\,cd}(X)$, analytic cohomological dim $\mathrm{an\,cd}(X^{an})$を次のように定義する。

$$\mathrm{alg\,cd}\,X = \min\{m \mid H^{\ell}(X, \mathcal{F}) = 0,\ \forall \ell > m,\ \forall \mathcal{F}\ \text{代数的 coherent sheaf}/X\}$$

$$\mathrm{an\,cd}\,X^{an} = \min\{m \mid H^{\ell}(X^{an}, \mathcal{F}) = 0,\ \forall \ell > m,\ \forall \mathcal{F}\ \text{解析的 coherent sheaf}/X\}$$

問題

$\mathrm{alg\,cd}\,X$ と $\mathrm{an\,cd}\,X^{an}$ を比較せよ。

次の定理はよく知られている。

代数的

Th

$$\mathrm{alg\,cd}\, X = \dim X \Longleftrightarrow X \text{ complete}$$

解析的

Th

$$\mathrm{an\,cd}\, X = \dim X \Longleftrightarrow X \text{ compact}$$

このことを使って低次元の多様体の alg cd と an cd をくらべると，

	$\mathrm{alg\,cd}\, X$	$\mathrm{an\,cd}\, X^{an}$
$\dim X = 1$	1	1
	0	0
$\dim X = 2$	2	2
	1	1
	1	0
	0	0

のようになる。したがって次元が2の時 $\mathrm{alg\,cd}\, X = 1$, $\mathrm{an\,cd}\, X^{an} = 0$ となるものが存在する可能性がある（実際に沢山あることはあとでわかる）。$\mathrm{alg\,cd}\, X$ と $\mathrm{an\,cd}\, X$ をくらべるにあたってまずこのような代数曲面，つまりアフィンでなくてスタインとなるような代数曲面をしらべよう。

以下代数的な事実と解析的な事実をひかくして書きならべる。

代数的	解析的
Th	Th
任意の algebraic coh. sheaf $\mathcal{F}$, ${}^{\forall}r>0$ について $\dim_{\mathbb{C}} H^r(X,\mathcal{F})<\infty$	$\forall$ analytic coh. s. $\mathcal{F}$, ${}^{\forall}r>0$ $\dim_{\mathbb{C}} H^r(X,\mathcal{F})<\infty$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
X は affine 多様体の modification (X は non-sing. と限うなり。)	X は Stein 多様体の modification

代数的	解析的
Th	Th
alg. cd $X=0 \Leftrightarrow X$: affine	an cd $X=0 \Leftrightarrow X$: Stein

代数的	解析的
Th	Th
affine 多様体のカテゴリーと $\mathbb{C}$-algebra のカテゴリーは dual である.	Stein space のカテゴリーと Stein algebra のカテゴリーは dual である。

代数曲面の alg cd と an cd を比べるのが問題であったが，まず具体的に次の問題を考える。

X を完備代数曲面，C を X 上の irreducible curve とする。その時，

問題

$X-C$ が Stein 多様体となる numerical な条件は存在するか。

つまり：

代数的	解析的
Th 上の X, C について 次は同値 (i) $X-C$ は affine。 (ii) C は ample。 (iii) $(C^2)>0$, C と異る任意の X 上の curve D に対して $(D\cdot C)>0$。	$\exists$?

次のことは成り立つのか。

(*) $X-C$ が Stein $\Longleftrightarrow$ $(C^2)\geqq 0$, C と異る X 上の $\forall$curve D に対して $(C\cdot D)>0$

(*)についていくらかの結果および興味ある例について以下にのべる。

まず $\Longrightarrow$ は正しい。

$\Longrightarrow$ の証明。Stein 多様体に complete curve はふくまれないから，$(C\cdot D)>0$。一方もし $(C^2)<0$ なら，C は1点に contract する。つまり X' compact analytic space があって1点 P をぬくと $X-C$ に同型 $X'-P\cong X-C$，$X'-P$ が Stein でないことがいえれば証明は終る。実際 $X'-C$ は 1−pseudoconcave である。(Andreotti-Grauert 参照) 次の定理を使う

Th. Z：q−pseudoconcave $\Longrightarrow$ $H^r(Z,\mathcal{F})<\infty$, $\forall r<\dim Z-q$

∀ coherent sheaf / Z

この系を使うと $H^0(X'-P, \mathcal{O}_{X'-P})$ の（vector space）次元は有限次元，したがって（$X'-P$ は）Stein 多様体になりえない。

(＊)の $\Longleftarrow$ について考えてみよう。

特に $(C^2)>0$，ならば $X-C$ affine したがって Stein である，したがって

(＊＊) $(C^2)=0$， $(C\cdot D)>0 \Longrightarrow X-C$

が正しいかということに帰着する。

(＊＊) が正しいかどうか今のところ証明できていない。これが正しい例は次にみるように沢山ある。反例はみつかっていない。

例1.

C : elliptic curve とする。$0 \neq \xi \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$ に対応する non-trivial extension $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to \mathcal{O}_C \to 0$ を考える。$X = P(E)$ とする。C として上の exact sequence から決る $P(E) \to C$ の section をとる。計算（あまり容易ではない）によって，$(C^2)=0$，C 以外の X 上の curve D に対して $(C\cdot D)>0$。この場合 $X-C \underset{an.}{\simeq} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ となり特に $X-C$ は Stein であることがわかる。なぜなら，$X-C$ は elliptic curve C 上の principal $\mathbb{G}_a$-bundle である。

$H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq \mathrm{Ext}(C, \mathbb{G}_a)$ に注意すると。$X-C$ は Lie 群である。

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\underset{\|}{\mathbb{G}_a}} \longrightarrow (X-C) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

故に $X-C \simeq \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}/(\omega_1, \omega_2)$。 さて ω_1, ω_2 が $\mathbb{C}$ 上 dependent なら，$X-C \simeq T\times\mathbb{C}$ となって $X-C$ が complete curve をふくんでしまうから，ω_1, ω_2 は $\mathbb{C}$ 上 independent である。したがって $X-C \underset{an.}{\simeq} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$.

ところで(＊＊)の条件を満す曲面をさがすことがあまりたやすいことではない。

例2.

C: curve genus は2以上とする。例1と同じように extension $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to \mathcal{O}_C \to 0$ を考える。$P(E)=X$ C も同様にして定めると。$(C^2)=0$，$(C\cdot D)>0$ である。$X-C$ は Stein であろうか。これは現在のところ不明である。Stein をいうには holomorph convex がいえれば十分である。故に，例2について(＊＊)が正しい $\Longleftrightarrow$ genus 2以上の Riemann 面上の principal $\mathbb{C}$-bundle は holomorph convex である。

open Riemann 面は Stein であるから松島－森本の定理によって その上の principal $\mathbb{C}$-bundle は Stein である したがって さらに

一般に

(＊＊＊) Riemann面上の principal $\mathbb{C}$-bundle は holomorph convex か。

(open の場合, genus が 0, 1 の場合は正しい。)

さて例2において $X-C$ は principal G_a-bundle である。J を C の Jabian variety とする。 $H^1(C,\mathcal{O}_C)\cong H^1(J,\mathcal{O}_J)\cong Ext(J,G_a)$ によって J上の principal $G_a=\mathbb{C}$-bundle Z が存在して, $X-C\cong\iota^*(Z)$ ここで ι は $C\hookrightarrow J$ である。 Z は Lie群である。

$$\begin{tikzcd} X-C \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ C \arrow[r, hook, "\iota"'] & J \end{tikzcd}$$

故に Z が holomorph convex がいえるなら $X-C$ が holomorph convex であることがわかる。

いつでも Z はそうか。実はかならずしもそうならないのである。

例3

例2の場合の特別な場合を考えよう。 C の Jacobian variety が $E\times E$, E は elliptic curve となったとする。(このような curve の存在については(3)を参照.) その時上の Z は $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ を rank 4 の discrete subgr でわってえられる。 $E\cong\mathbb{C}/(1,a)$ とすると Z の周期行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & u & v \end{pmatrix}$$

の型をしている。

(6)を使うと $\frac{v}{u}\in\mathbb{Q}$ なら Σ が holomorph convex であることがわかる。

以上をまとめると

C : Curve genus が 2, C の Jacobian $= E\times E$

$$0 \longrightarrow O_C \longrightarrow E_\xi \longrightarrow O_C \longrightarrow 0 \quad , 0\neq\xi\in H^1(C,\underline{O}_C)$$

$X_\xi = P(E_\xi)$ とする。その時,

vector space の base $\xi_0, \xi_1 \in H^1(C,\underline{O}_C)$ が存在して次の性質をもつ。

$\xi = a_0\xi_0 + a_1\xi_1$, $(a_0, a_1)\in P(H^1(C, O_C))$ とみてその比が有理数なら $X_\xi - C$ は Stein 多様体である。

(＊＊)を3次元以上に予想するのは非常に困難である。実際に3次元代数的多様体 X, その上の non-sing. irreducible divisor D で, C curve $\not\subset$ D については $(D\cdot C)>0$, $C\subset D$ については $(C\cdot D)=0$, $X-C$ 上の holomorphic function は定数だけという例をあげることができる。

(＊＊)が正しいなら2次元の特殊性が関係していそうな感じがする。

文献

1. A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes Bull. Soc. Math

France, 90 (1962) 193–259

2. J. Goodman, Affine open subset of algebraic varieties and ample divisors, Ann. of Math. Vol 89 1969 160–183

3 T. Hyashida and M. Nishi, Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves. J. Math. Soc. Japan Vol. 17 No 1, 1965

4 Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur Certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math France 88 (1960), 137–155

5. A. Morimoto, On the classification of noncompact complex abelian Lie groups, Tras. Amer. Math. Soc. Vol. 123, No.1 1966 200–228

6. R. Narasimhan, The Levi problème for complex spaces, II Math. Ann. 186 (1962) 1–16